

Aus dem Institut für Kunststofftechnologie der Universität Stuttgart

## Wärmedissipation in Polymerschmelzen bei ebener Schleppströmung, thermischer Anfahrvorgang und Gleichgewichtszustand\*)

Von H. H. Winter

Mit 8 Abbildungen und 2 Tabellen

(Eingegangen am 15. Dezember 1971)

### Nomenklatur

$a = \lambda/c\rho$	$[m^2/s]$	Temperaturleitfähigkeit
$b$	$[grad^{-1}]$	Temperaturkoeffizient der Viskosität
$B_n(Fo)$	$[-]$	<i>Fourier</i> -Koeffizienten, siehe Gl. [15]
$c$	$[kcal/grad\ kg]$	spez. Wärmekapazität
$f$	$[\%]$	relativer Fehler, siehe Gl. [22] und [23]
$Fo = at/h^2$	$[-]$	<i>Fourier</i> -Zahl
$G$	$[-]$	<i>Griffith</i> -Zahl, siehe Gl. [11]
$G_\infty$	$[-]$	auf den thermischen Gleichgewichtszustand bezogene <i>Griffith</i> -Zahl, siehe Gl. [12]
$h$	$[m]$	Spaltweite
$m$	$[-]$	Fließexponent, siehe Gl. [1]
$Pr = \nu/a$	$[-]$	<i>Prandtl</i> -Zahl
$t$	$[s]$	Zeit (Anfahrbeginn bei $t = 0$ )
$T$	$[^\circ C]$	Temperatur
$T_0, T_w$	$[^\circ C]$	Anfangs- bzw. Wandtemperatur
$v$	$[m/s]$	Geschwindigkeit
$v_0, v_\infty$	$[m/s]$	Plattengeschwindigkeit bei $t = 0$ bzw. $t \rightarrow \infty$
$x$		Strömungsrichtung
$y$		Richtung des Geschwindigkeitsgradienten
$Y = y/h$		dimensionslose Koordinate
$\dot{\gamma}$	$[s^{-1}]$	Deformationsgeschwindigkeit
$\dot{\gamma}^*$	$[-]$	dimensionslose Deformationsgeschwindigkeit, siehe Gl. [20]
$\theta = 1 + b(T - T_0)$	$[-]$	dimensionslose Temperatur
$\lambda$	$[kcal/m\ s\ grad]$	Wärmeleitfähigkeit
$\nu$	$[m^2/s]$	kinematische Viskosität
$\rho$	$[kg/m^3]$	Dichte
$\tau, \tau_{xy}$	$[kp/cm^2]$	Schubspannung in $x$ -Richtung, die an einer Fläche senkrecht zu $y$ angreift
$\tau_0, \tau_\infty$	$[kp/cm^2]$	Schubspannung $\tau_{xy}$ zur Zeit $t = 0$ bzw. $t \rightarrow \infty$
$\tau^*$	$[-]$	dimensionslose Schubspannung, siehe Gl. [21]
$\Phi$	$[cm^{2m}\ kp^{-m}\ s^{-1}]$	Fluidität, siehe Gl. [1]

### Einleitung

Bei Strömungsvorgängen in Polymerschmelzen, wie sie in der Kunststoffverarbeitung auftreten, sind Geschwindigkeits- und Temperaturfeld gekoppelt (sogenannte thermische Rückkopplung). Das Geschwindigkeitsfeld beeinflusst das Temperaturfeld, da die im Flüssigkeitsvolumen entstehende Dissipationswärme von den Geschwindigkeitsgradienten abhängt. Das Temperaturfeld wiederum beeinflusst das Geschwindigkeitsfeld, da die Viskosität der Polymerschmelzen stark temperaturabhängig ist. Für die ana-

lytische Untersuchung dieser Strömungsvorgänge bedeutet das, daß die Differentialgleichungen für das Geschwindigkeits- und das Temperaturfeld *gleichzeitig* berechnet werden müssen.

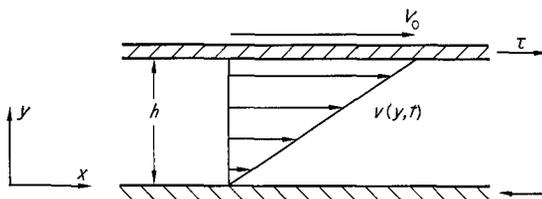


Abb. 1. 2-Platten-Modell bei ebener Schleppströmung

An einem einfachen Strömungsfall, der Schleppströmung zwischen zwei ausgedeh-

\*) Vortrag zum 2. Stuttgarter Kunststoffkolloquium, 28.-30. 9. 1971.

ten, ebenen Platten (2-Platten-Modell, siehe Abb. 1), wird im folgenden untersucht

1. wann die Wärmedissipation vernachlässigbar ist, so daß mit konstanter Viskosität oder, bei strukturviskosen Stoffen, zumindest mit temperaturunabhängiger Viskosität gerechnet werden kann;

2. für welche Schergeschwindigkeiten man die Temperaturabhängigkeit linearisieren kann, ohne einen zu großen Fehler zu machen. Physikalisch einwandfreier wäre es, die Viskosität exponentiell von der Temperatur abhängig anzusetzen, aber mit der linearisierten Temperaturfunktion kann einfacher gerechnet werden;

3. wie lange der thermische Anfahrvorgang dauert, wobei unter thermischem Anfahrvorgang die Änderung des Temperaturfeldes von einem isothermen Anfangszustand zum thermischen Gleichgewichtszustand verstanden wird. Mit dem Temperaturfeld ändert sich dann, wie schon ausgeführt, das Geschwindigkeitsfeld.

Unmittelbare Anwendungsfälle für die folgenden Überlegungen am 2-Platten-Modell sind die Strömung im Platte-Platte-, im Platte-Kegel- und im *Couette*-Viskosimeter, sowie im Gleitlager. In erweitertem Sinne gelten sie jedoch auch für sogenannte Sacknuten-Torpedos und zylindrische Scherkörper in Extruderschnecken. Außerdem können sie auf beliebige andere Strömungsfälle von Polymerschmelzen übertragen werden. Das müßte jedoch in einer gesonderten Arbeit noch nachgewiesen werden.

Wärmedissipation und Wärmeleitung von bzw. zu den Wänden bestimmen das *Temperaturfeld* im Spalt. Der Wärmetransport durch Strömung ist hier ohne Einfluß, da die Stromlinien auf einheitlicher Temperatur sind ( $\partial T/\partial x = 0$ ). Im stationären Betrieb sind die lokalen Temperaturgradienten (in Betrag und Vorzeichen) so, daß die gesamte Dissipationswärme an die Wand abgeleitet wird. Dieses Gleichgewichtstemperaturfeld stellt sich nicht spontan ein, sondern erst nach einer Anlaufzeit, deren Länge vom Stoff und von den Versuchsbedingungen abhängt. Für kurzzeitige Prozesse interessiert, bis zu welcher Prozeßdauer noch isotherm gerechnet werden kann, oder ob vielleicht schon der Gleichgewichtszustand erreicht wird. Für die Berechnung des Anfahrvorganges wird angenommen, daß das gesamte 2-Platten-Modell zu Beginn die einheitliche Temperatur  $T_0$  hat, und daß die Temperatur

der Platten konstant bleibt ( $T_w = T_0$ )<sup>1)</sup>. 2 verschiedene Möglichkeiten des Anfahrens werden beschrieben: Anfahren a) mit konstanter Schubspannung und b) mit konstanter Plattengeschwindigkeit.

Die Untersuchung schließt an eine Arbeit (1) an, in der für eine *Newtonsche* Flüssigkeit berechnet wurde, wie sich das Temperaturfeld im Scherspalt vom isothermen Anfangsbis zum Gleichgewichtszustand aufbaut. Die Rechnung wird hier auf eine strukturviskose Flüssigkeit (beschrieben durch einen Potenz-Ansatz) erweitert, wobei darauf verzichtet wird, den Rechengang im Detail noch einmal zu beschreiben.

Näherungsweise wurde schon früher von *Krekel* (2) das sich aufbauende Temperaturfeld für eine sinh-Flüssigkeit (*Prandtl/Eyring*) bei konstanten Wandtemperaturen berechnet. Es interessierte dabei, wie lange Zerkleinerungsvorgänge in einer Flüssigkeit dauern dürfen, ohne daß die Schubspannung durch die Wärmedissipation unter ein für die Zerkleinerung notwendiges Schubspannungsniveau abgesunken ist.

*Powell* und *Middleman* (3) untersuchten den thermischen Anfahrvorgang für eine *Newtonsche* Flüssigkeit mit konstanter Viskosität, um eine Aussage darüber machen zu können, wie lange die ungekühlte Wand eines *Couette*-Systems aufgrund ihrer Wärmekapazität quasi isotherm bleibt bzw. wie lange es dauert, bis sich in der Wand ein konstantes Temperaturprofil ausgebildet hat. Da die Viskosität als temperaturunabhängig angenommen wurde, waren die errechneten Zeiten nur eine Funktion der Geometrie und der Wärmeleitfähigkeit, während die *Griffith*-Zahl  $G$  keinen Einfluß hatte.

### Grundgleichungen und Annahmen für die Rechnung

Das Fließverhalten von Polymerschmelzen wird mit der skalaren Potenzformel nach *Ostwald/de Waele*

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \Phi(T)\tau^m \quad [1]$$

beschrieben, in der die Fluidität in einem abgegrenzten Bereich als linearisierte Temperaturfunktion

$$\Phi(T) = \Phi(T_0) \cdot [1 + b(T - T_0)] \quad [2]$$

<sup>1)</sup> Die Rechenergebnisse können durch Koordinatentransformation auf ein 2-Platten-Modell mit einer isothermen und einer adiabaten Wand übertragen werden.

angesetzt wird. Diese Linearisierung ist, wie weiter unten noch gezeigt wird, bis  $G \approx 10$  zulässig. Die Potenzformel wird hier trotz der bekannten Mängel (4, 5) verwendet, da mit ihr das Fließverhalten bereichsweise (außer für kleine Schergeschwindigkeiten) sehr gut approximiert werden kann und da sich wegen ihres einfachen Aufbaus noch eine Integral-Lösungsmethode für das Problem anwenden läßt. Die elastischen Effekte beim Anfahren können damit allerdings nicht wiedergegeben werden.

Die Schubspannung  $\tau$  wird über den Spalt als konstant angenommen, d. h. Beschleunigungsvorgänge werden vernachlässigt. Diese Vereinfachung ist zulässig (1), da die *Prandtl-Zahl* von Polymerschmelzen groß ist ( $Pr \approx 10^5$ ).

Die Differentialgleichung für das Temperaturfeld (Energiegleichung) lautet

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \tau \frac{\partial v}{\partial y} \quad [3]$$

und, nach Einsetzen von  $\partial v/\partial y$  aus der Stoffgleichung [1],

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \Phi_0 \tau^{m+1} \cdot [1 + b(T - T_0)]. \quad [4]$$

Die Rand- und Anfangsbedingungen sind

isotherme Wände:  $T(y = 0, t) = T(y = h, t) = T_w$  [5]

konst. Anfangstemperatur:  $T(y, t = 0) = T_0 = T_w$ . [6]

Mit den dimensionslosen Größen

Position im Spalt  $Y = y/h$ , [7]

*Fourier-Zahl*  $Fo = at/h^2$ , [8]

Temperatur  $\theta(Y, Fo) = 1 + b(T - T_0)$  [9]

und der *Griffith-Zahl*  $G$  (siehe Gl. [11]) formt man die Energiegleichung um zu

$$\frac{\partial \theta(Y, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta(Y, Fo)}{\partial Y^2} + (\tau(Fo)/\tau_0)^{m+1} G \theta(Y, Fo), \quad 0 \leq Y \leq 1, 0 < Fo$$

R. B.:  $\theta(0, Fo) = \theta(1, Fo) = 1, \quad 0 \leq Fo$

A. B.:  $\theta(Y, 0) = 1, \quad 0 \leq Y \leq 1. \quad [10]$

**Parameter Griffith-Zahl**

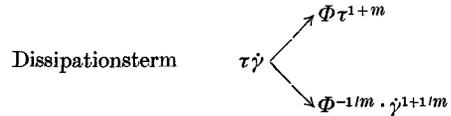
Drei Faktoren sind dafür maßgebend, ob bzw. wie stark das Temperaturfeld das Geschwindigkeitsfeld beeinflusst:

- die Wärmedissipation,
  - die Wärmeleitung,
  - die Temperaturabhängigkeit der Viskosität.
- Sie werden zusammengefaßt in der *Griffith-*

Zahl (6)

$$G = \frac{b v_0^{1+m} h^{1-m}}{\Phi_0^{1/m} \lambda} = \frac{b \tau_0^{1+m} \Phi_0 h^2}{\lambda}. \quad [11]$$

Beide Definitionen von  $G$  sind äquivalent, da im Dissipationsterm für einen *Ostwald/de Waele*-Stoff die Schubspannung  $\tau$  oder die Schergeschwindigkeit  $\dot{\gamma}$  eliminiert werden kann:



Bei der folgenden Rechnung findet man, daß die Dissipationswärme das Geschwindigkeitsfeld erst merklich beeinflusst, wenn  $G$  größer als 1 ist.

Neben der *Griffith-Zahl* in der obigen Form kann auch

$$G_\infty = G (\tau_\infty/\tau_0)^{1+m} = \frac{b \tau_\infty^{1+m} \Phi_0 h^2}{\lambda}, \quad [12]$$

eine auf den thermischen Gleichgewichtszustand bezogene *Griffith-Zahl*, als Parameter für die Rechnung verwendet werden. Beim Anfahren mit konstanter Schubspannung ist  $G_\infty = G$ . Dagegen ist für das Anfahren mit konstanter Geschwindigkeit ( $v(1, Fo) = \text{konst}$ )  $G_\infty < G$ , d. h. die Dissipationsleistung nimmt bis auf einen Gleichgewichtswert ab.

Die folgende Lösung ist nur für

$$0 < G_\infty < \pi^2$$

sinnvoll.  $G_\infty$  gleich  $\pi^2$  kann grundsätzlich nicht verwirklicht werden, da für  $\tau = \text{konst}$  die Geschwindigkeit  $v(1, Fo \rightarrow \infty)$  unendlich groß werden würde, bzw. da für  $v(1, Fo) = \text{konst}$  mit unendlich großer Schubspannung angefahren werden müßte [s. Gl. 15].

**Allgemeine Lösung für das Temperaturfeld**

Die Lösung für das Temperaturfeld kann in der Form

$$\theta = \theta_\infty - \sum_{n=1}^{\infty} B_n(Fo) \frac{\sin(n\pi Y)}{n\pi} \quad [13]$$

mit der Lösung für den Gleichgewichtszustand

$$\theta_\infty = \frac{1 - \cos \sqrt{G_\infty}}{\sin \sqrt{G_\infty}} \sin(Y \sqrt{G_\infty}) + \cos(Y \sqrt{G_\infty}) \quad [14]$$

angesetzt werden (1). Dieser Ansatz, in dem die Variablen  $Fo$  und  $Y$  getrennt sind, erfüllt die Differentialgleichung [10] mit den Anfangs-

und Randbedingungen. In der Sinus-Form der *Fourier*-Reihe ist bereits die Randbedingung [Gl. 5] berücksichtigt. Die *Fourier*-Koeffizienten  $B_n$  werden nach der Methode der „Variation der Parameter“ (7) berechnet:

$$B_n(F_0) = \frac{2G(1 - (-1)^n)}{n^2 \pi^2 - G_\infty} \exp \left[ - \int_0^{F_0} (n^2 \pi^2 - G) \times (\tau(F_0)/\tau_0)^{1+m} dF_0 - F_0(n^2 \pi^2 - G_\infty) \right] \times \left\{ (\tau_\infty/\tau_0)^{1+m} - n^2 \pi^2 \int_0^{F_0} \left[ \exp \left[ \int_0^{F_0} (n^2 \pi^2 - G) \times (\tau(F_0)/\tau_0)^{1+m} dF_0 \right] \times \left( (\tau(F_0)/\tau_0)^{1+m} - (\tau_\infty/\tau_0)^{1+m} \right) \right] dF_0 \right\}. \quad [15]$$

**Anfahren mit konstanter Schubspannung**

Die Schubspannung wird konstant gehalten

$$\tau(F_0) = \tau_0 = \tau_\infty = \text{konst}, \quad 0 \leq F_0.$$

Das Schubspannungsverhältnis  $\tau/\tau_0$  in Gl. [10] wird gleich 1, und der Wert des

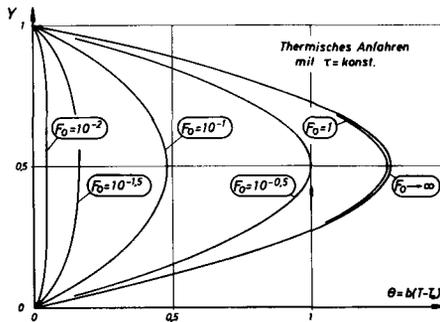


Abb. 2. Temperaturfeld im Scherspalt mit isothermer Wand; *Griffith*-Zahl  $G = 5$ ; thermisches Anfahren mit  $\tau = \text{konst}$ ;  $m = 2,5$ .

Fließexponenten  $m$  ist damit ohne Bedeutung für die Rechnung.  $m$  ist kein selbständiger Parameter mehr, sondern kommt nur noch in der *Griffith*-Zahl vor. Die *Fourier*-Koeffizienten (Gl. [15]) können jetzt explizit berechnet werden

$$B_n(F_0) = \frac{2G(1 - (-1)^n)}{n^2 \pi^2 - G} \exp[-F_0(n^2 \pi^2 - G)]. \quad [16]$$

Das Temperaturfeld (multipliziert mit dem Temperaturkoeffizienten  $b$ ) wird in Abb. 2 bei verschiedenen *Fourier*-Zahlen gezeigt. Für  $F_0 = 10^{-2}$  ist die entwickelte Wärmemenge nicht mehr vernachlässigbar und bei  $F_0 = 1$  ist der thermische Gleichgewichtszustand nahezu erreicht.

Die Relativgeschwindigkeit  $v(1, F_0)$  der Platten nimmt mit der Zeit zu und das Geschwindigkeitsfeld beult sich S-förmig aus (Abb. 3)

$$v(Y, F_0)/v_0 = \frac{(1 - \cos \sqrt{G}) (1 - \cos (Y \sqrt{G}))}{\sqrt{G} \sin \sqrt{G}} + \frac{\sin(Y \sqrt{G})}{\sqrt{G}} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n(F_0) \times \frac{1 - \cos(n\pi Y)}{n^2 \pi^2}. \quad [17]$$

**Anfahren mit konstanter Plattengeschwindigkeit**

Die Relativgeschwindigkeit der Platten wird konstant gehalten

$$v(1, F_0) = v_0 = v_\infty = \text{konst}, \quad 0 \leq F_0,$$

und die Schubspannung fällt mit der Dauer des Prozesses vom Anfangswert  $\tau_0$  auf den Gleichgewichtswert  $\tau_\infty$  ab:

$$\tau(F_0)/\tau_0 = \left[ \frac{2 - 2 \cos \sqrt{G_\infty}}{\sqrt{G_\infty} \sin \sqrt{G_\infty}} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n(F_0) \times \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi^2} \right]^{-1/m}. \quad [18]$$

*thermisches Anfahren bei  $\tau = \text{konst}$ .*

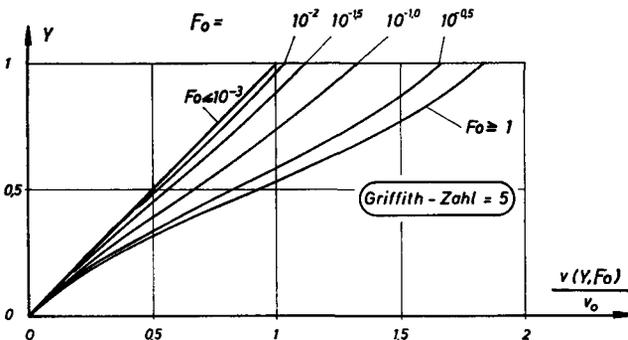


Abb. 3. Geschwindigkeitsfeld bei thermischer Rückkopplung; *Griffith*-Zahl  $G = 5$ ; thermisches Anfahren mit  $\tau = \text{konst}$ ;  $m = 2,5$ .

Die Differentialgleichung für das Temperaturfeld (Gl. [10]) ist wegen der Zeitabhängigkeit der Schubspannung nichtlinear.

Die *Fourier*-Koeffizienten können nicht mehr explizit berechnet werden. Sie werden numerisch bestimmt, indem man  $B_n(Fo)$  in Gl. [19] einsetzt,  $\tau(Fo)/\tau_0$  mit der „Regula Falsi“ systematisch einengt und damit wieder  $B_n(Fo)$  berechnet. Wegen der Integrale muß dabei mit einer kleinen *Fo*-Zahl (z. B.  $Fo = 10^{-3}$ ) begonnen und mit kleinen Zeitschritten  $\Delta Fo$  weitergerechnet werden.

Der Schubspannungsverlauf für einen Stoff mit Fließexponenten  $m = 2,5$  und verschiedenen *Griffith*-Zahlen wird in Abb. 4 gezeigt.

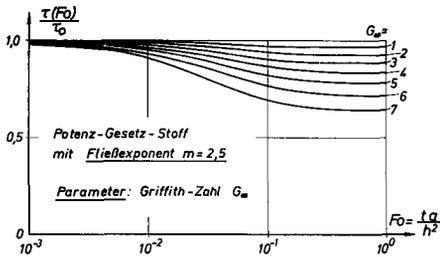


Abb. 4. Absinken der Schubspannung während des thermischen Anfahrvorgangs mit  $v(1, Fo) = \text{konst.}$

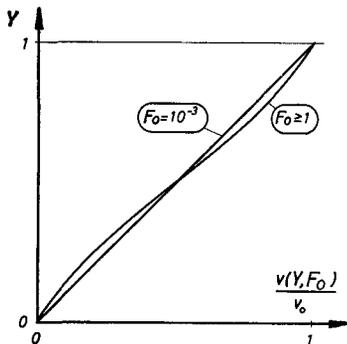


Abb. 5. Geschwindigkeitsfeld im Scherspalt mit isothermer Wand; *Griffith*-Zahl  $G = 10$ ; Fließexponent  $m = 2,5$ ; thermisches Anfahren mit  $v(1, Fo) = \text{konst.}$

Das Geschwindigkeitsfeld

$$v(Y, Fo)/v_0 = (\tau(Fo)/\tau_0)^m \times \left[ \frac{(1 - \cos \sqrt{G_\infty}) (1 - \cos(Y \sqrt{G_\infty}))}{\sqrt{G_\infty} \sin \sqrt{G_\infty}} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n(Fo) \frac{1 - \cos(n\pi Y)}{n^2 \pi^2} \right] \quad [19]$$

beult sich mit der Zeit so aus, daß an der wärmsten Stelle der größte Geschwindigkeitsgradient ist (Abb. 5).

Die Wärmedissipation macht sich, je nachdem wie groß  $G$  ist, für  $o > 10^{-3} \div 10^{-2}$  bemerkbar und der thermische Gleichgewichtszustand ist bei  $Fo = 1$  fast vollständig erreicht.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß der thermische Anfahrvorgang unabhängig von der thermischen Randbedingung ( $\tau(Fo) = \text{konst}$  oder  $v(1, Fo) = \text{konst}$ ) von  $Fo \approx 10^{-3}$  bis  $Fo \approx 1$  dauert.

Thermischer Gleichgewichtszustand

Der thermische Gleichgewichtszustand für die Schleppströmung im 2-Platten-Modell mit isothermen Wänden wurde schon von mehreren Autoren (siehe z. B. Tab. 1) berechnet. *Nahme* (8) hat bereits für eine *Newtonsche* Flüssigkeit den Parameter  $G$  verwendet, wobei er sehr anschaulich  $\sqrt{G}$  als dimensionslose Geschwindigkeit und  $\sqrt{G_\infty}$  als dimensionslose Schubspannung bezeichnete. In Erweiterung dessen werden hier für Potenzgesetz-Flüssigkeiten die dimensionslose Schergeschwindigkeit

$$j^* = G^{m/(1+m)} = v_0/h \cdot \left( \frac{b h^2}{\lambda \Phi_0^{1/m}} \right)^{m/(1+m)} \quad [20]$$

und die dimensionslose Schubspannung

$$\tau^* = G_\infty^{1/(1+m)} = \tau_\infty \left( \frac{b \Phi_0 h^2}{\lambda} \right)^{1/(1+m)} \quad [21]$$

eingeführt.

Tab. 1. Literatur über den thermischen Gleichgewichtszustand im Scherspalt

Autor	Flüssigkeit	Temperaturabhängigkeit der Viskosität
<i>Nahme</i> (8)	<i>Newton</i>	exponentiell
<i>Schlichting</i> (9)	<i>Newton</i>	konstant
<i>Turian</i> und <i>Bird</i> (10)	<i>Newton</i>	exponentiell
<i>Krekel</i> (2)	<i>Prandtl/Eyring</i>	exponentiell
<i>Joseph</i> (11)	<i>Newton</i>	linear, quadratisch, exponentiell
<i>Martin</i> (12)	<i>Ostwald/de Waele</i>	exponentiell
<i>Gavis</i> und <i>Laurence</i> (13)	<i>Newton, Ostwald/de Waele</i>	exponentiell

In Abb. 6 werden die Gleichgewichtslösungen für die Schubspannung

A: bei temperaturunabhängiger Viskosität (isothermer Fall),

B': bei linearer Temperaturabhängigkeit der Viskosität und

B: bei exponentieller Temperaturabhängigkeit der Viskosität [gezeichnet nach den Ergebnissen der Rechnung von *Martin* (12) und von *Laurence* und *Gavis* (13)]

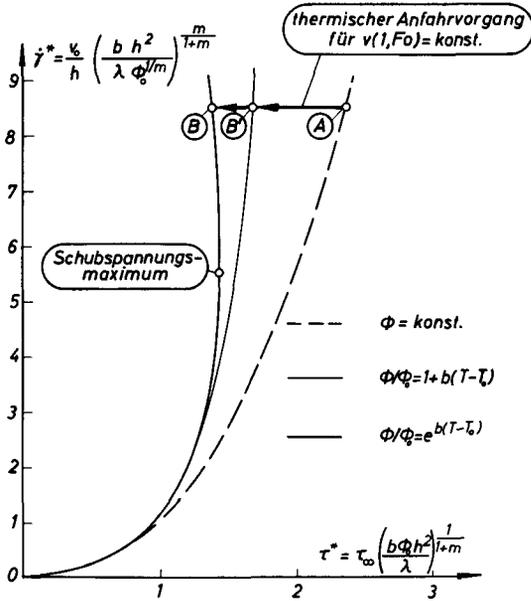


Abb. 6. Einfluß der Dissipation auf die Schubspannung im Scherspalt; Fließexponent  $m = 2,5$

miteinander verglichen. Dadurch soll festgestellt werden, bis zu welchem Wert von  $G$  die Wärmedissipation überhaupt vernachlässigbar ist und bis zu welchem Wert von  $G$  die (für die Berechnung des Anfahrvorganges angewendete) Linearisierung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität zulässig ist. Für kleine Schergeschwindigkeiten liegen alle drei Kurven noch dicht beisammen; die Wärmedissipation ist noch vernachlässigbar. Bis zu einer größeren Schergeschwindigkeit kann der Gleichgewichtszustand in guter Näherung mit *linear* von der Temperatur abhängiger Viskosität berechnet werden. Der Fehler bei der Rechnung mit konstanter Viskosität

$$f_{\text{konst}} = \frac{\tau_{\text{konst}} - \tau_{\text{exp}}}{\tau_{\text{exp}}} \quad [22]$$

bzw. bei der Rechnung mit linear von der Temperatur abhängiger Viskosität

$$f_{\text{lin}} = \frac{\tau_{\text{lin}} - \tau_{\text{exp}}}{\tau_{\text{exp}}} \quad [23]$$

wird in Tab. 2 für verschiedene Werte von  $G$  und  $m$  ausgerechnet. Als Richtwert kann gesagt werden, daß für  $G < 1$  mit temperaturunabhängiger und für  $G < 10$  mit linear von

der Temperatur abhängender Viskosität gerechnet werden darf.

Tab. 2. Relativer Fehler  $f_{\text{konst}}$  und  $f_{\text{lin}}$  beim Rechnen mit konstanter bzw. mit linear von der Temperatur abhängiger Viskosität

$m$	$f_{\text{konst}} [\%]$			$f_{\text{lin}} [\%]$		
	$G = 0,5$	$G = 1,0$	$G = 1,5$	$G = 15$	$G = 10$	$G = 15$
1,0	4,1	8,2	12,2	4,5	10,9	17,1
1,5	2,8	5,6	8,3	3,8	10,1	16,7
2,0	2,0	4,0	6,0	3,3	9,2	15,8
2,5	1,5	3,4	5,0	2,8	8,4	14,9
3,0	1,1	2,8	4,3	2,5	7,7	13,9
3,5	0,9	2,4	3,7	2,3	7,1	13,0
4,0	0,7	2,2	3,3	2,0	6,6	12,3

Ein verblüffendes Ergebnis der Rechnung ist, daß die Schubspannung mit der Schergeschwindigkeit *nicht* beliebig weit ansteigt, sondern bei einer bestimmten apparate- und stoffabhängigen Schergeschwindigkeit einen Maximalwert erreicht und dann wieder abfällt. Dieses Schubspannungsmaximum ist rechnerisch schon vor langem (8) gefunden, aber, nach Wissen des Autors, noch nicht experimentell bestätigt worden.

Dieser Betriebszustand ( $\tau_\infty = \text{max}$ ) kann nur für den Sonderfall  $m = 1$  explizit formuliert und muß sonst numerisch berechnet werden. Dabei ergibt sich, daß *Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld bei Erreichen des Schubspannungsmaximums für alle Flüssigkeiten, deren Fließverhalten sich mit dem Potenzansatz [Gl. 1] beschreiben läßt, immer die gleichen sind.*

$$\begin{aligned} \tau_\infty &= \tau_{\infty, \text{max}}: \\ b(T - T_0) &= \ln 3,27672 \\ &\quad - 2 \ln [\cosh(2,39936 y/h - 1,19968)], \quad [25] \\ v/v_0 &= 0,59980 \\ &\quad \times [\tanh(2,39936 y/h - 1,19968) - \tanh(-1,19968)] \quad [25] \end{aligned}$$

Die *Griffith-Zahlen* und die anderen Parameter sind

$$G_{\infty, \text{max}} = 3,51383 \text{ (siehe dazu auch Lit. 13),}$$

$$G_{\infty, \text{max}} = 3,51383 \cdot 2,27672^{1+1/m},$$

$$\tau_{\infty, \text{max}} = \left\{ \frac{3,51383 \cdot \lambda}{b \cdot h^2 \Phi_0^m} \right\}^{\frac{1}{1+m}},$$

$$(\tau_0/\tau_\infty)_{\text{max}} = 2,27672^{1/m}.$$

Der thermische Anfahrvorgang kann in Abb. 6 ebenfalls eingezeichnet werden. Die rechte, gestrichelte Kurve ist der isotherme Anfangszustand und die linke, durchgezogene Kurve der thermische Gleichgewichtszu-

stand. Beim Anfahren mit konstanter Plattengeschwindigkeit wandert man auf einer Waagerechten von rechts nach links und

beim Anfahren mit konstanter Schubspannung auf einer Senkrechten von unten nach oben. Man sieht, daß beim Anfahren mit konstanter Geschwindigkeit immer ein thermischer Gleichgewichtszustand erreicht wird. Beim Anfahren mit konstanter Schubspannung wird ein Gleichgewichtszustand jedoch nur erreicht, wenn die Schubspannung kleiner  $\tau_{max}$  ist. Das kommt daher, daß die beiden Anfahrvorgänge energetisch völlig verschieden sind: Beim Anfahren mit konstanter Plattengeschwindigkeit nimmt die Reibleistung mit steigender Temperatur ab, während das System beim Anfahren mit konstanter Schubspannung mit steigender Temperatur immer mehr Energie verbraucht. Das Nicht-Erreichen des Gleichgewichtszustandes bedeutet, daß die Wärmedissipation schneller zunimmt als die Wärmeleitung und also mehr Wärme entsteht als an die Wandungen abgeleitet wird.

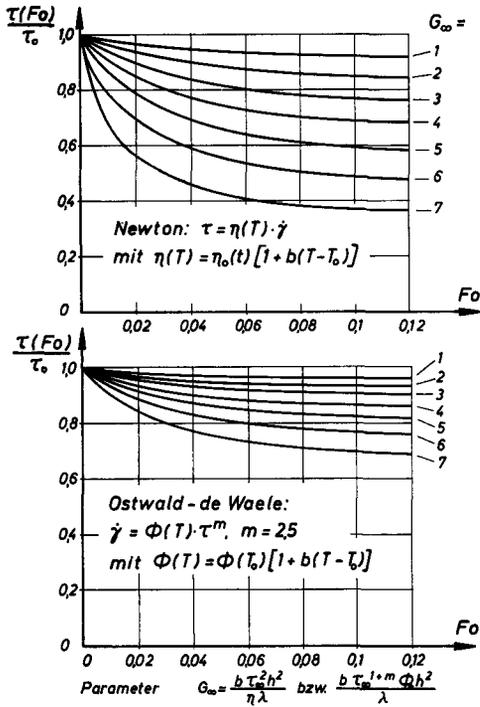


Abb. 7. Absinken der Schubspannung während des thermischen Anfahrvorganges für  $m = 1$  (oberes Bild) und für  $m = 2,5$  (unteres Bild)

**Einfluß des Fließexponenten**

Der Einfluß der Wärmedissipation auf die Schubspannung sinkt mit steigendem Wert des Fließexponenten  $m$ . In Abb. 7 sind die Schubspannungsverläufe während des thermischen Anfahrens für eine Newtonsche und für eine Ostwald/de Waelesche Flüssigkeit mit  $m = 2,5$  gegenübergestellt. Bei gleichen Werten von  $G$  ist der Schubspannungsabfall für  $m = 1$  deutlich größer als für  $m = 2,5$ . In Abb. 8 sind für verschiedene Werte von  $m$  Kurvenpaare gezeichnet, die jeweils den isothermen Anfangszustand (gestrichelt) und den thermischen Gleichgewichtszustand (durchgezogen) betreffen. Hieraus sieht man ebenfalls, daß oberhalb  $G = 1$  bei strukturviskosen Stoffen eher isotherm gerechnet werden darf als bei Newtonschen (siehe dazu auch Tab. 2).

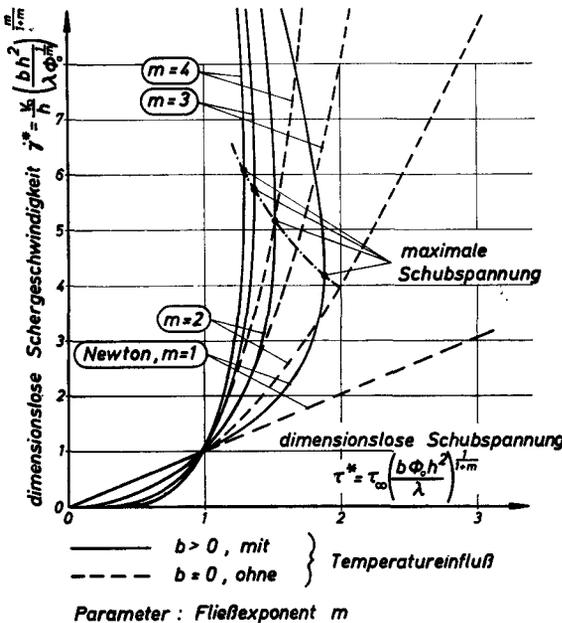


Abb. 8. Schubspannungen und Schergeschwindigkeiten bei isothermen (gestrichelte Kurven) und bei thermischem Gleichgewichtszustand (durchgezogene Kurven)

Der Autor bedankt sich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. G. Schenkel für die Anregung und Unterstützung dieser Arbeit und bei Herrn Prof. Dr.-Ing. E. R. G. Eckert für die hilfreichen Diskussionen. Die numerische Auswertung der Ergebnisse wurde auf der Rechenanlage des Rechenzentrums der Universität Stuttgart durchgeführt.

*Zusammenfassung*

Für Polymerschmelzen wird am Beispiel der Schleppströmung im 2-Platten-Modell die Kopplung zwischen Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld (die sogenannte thermische Rückkopplung) untersucht. Aus der Rechnung ergibt sich, daß der thermische Anfahrvorgang, also die Änderung des Temperaturfeldes vom isothermen Anfangszustand zum thermischen Gleichgewichtszustand, bei einer Fourier-Zahl  $Fo = 1$  fast vollständig

abgeschlossen ist. Diese Dauer des Anfahrvorganges ist unabhängig davon, ob mit konstanter Plattengeschwindigkeit oder mit konstanter Schubspannung gefahren wird. – Die thermische Rückkopplung ist um so stärker, je größer der stoff- und prozeßabhängige Parameter die *Griffith*-Zahl  $G$  ist. Die Viskosität kann bis  $G = 1$  noch als temperaturunabhängig und bis  $G = 10$  als linear von der Temperatur abhängig angesehen werden. Außerdem findet man, daß sich Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld bei der strukturviskosen Flüssigkeit wesentlich weniger beeinflussen als bei einer *Newtonschen* Flüssigkeit.

#### Summary

The interaction of temperature and velocity fields for polymer melts in plane *Couette* flow was investigated. It was found analytically that the thermal development from a uniform initial temperature to the equilibrium temperature field (in which all the dissipated flow energy is conducted to the walls) is almost completed at  $Fo = 1$ . The duration of this development is nearly independent of the system, whether it is driven at constant speed or with a constant force. – The interaction of temperature and velocity field is more intensive the larger the *Griffith* number  $G$ . The viscosity may be taken as independent of temperature up to  $G = 1$  and as linearly dependent on the temperature up to  $G = 10$ . Furthermore, the influence of the temperature on the velocity field is much less in a shear thinning than in a Newtonian fluid.

#### Literatur

- 1) Winter, H. H., Int. J. Heat Mass Trans. **14**, 1203/1212 (1971).
- 2) Kreckel, J., Herstellung und Messung von Scherströmungen mit extrem großer Schubspannung und ihr Einfluß auf die Zerkleinerung von Agglomeraten, Diss. TH (Karlsruhe 1964).
- 3) Powell, R. L. and S. Middleman, Int. J. Eng. Sci. **6**, 49/57 (1968).
- 4) Rautenbach, R., Chem. Ing. Techn. **36**, 277/282 (1964).
- 5) Pawlowski, J., Rheol. Acta **6**, 54/61 (1967).
- 6) Griffith, R. M., Ind. Engng. Chem. Fund **1**, 180/187 (1962).
- 7) Berg, P. W. and J. L. McGregor, Elementary partial differential equations, S. 102 ff. (San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam 1966).
- 8) Nakme, R., Ing. Arch. **11**, 191/209 (1940).
- 9) Schlichting, H., Z. angew. Math. Mech. **31**, 78/83 (1951).
- 10) Turian, R. M. and R. B. Bird, Chem. Engng. Sci. **18**, 689/696 (1963).
- 11) Joseph, D. D., Phys. Fluids **7**, 1761/1771 (1964).
- 12) Martin, B., Int. J. Non-linear Mechanics **2**, 285/301 (1967).
- 13) Gavis, I. and R. L. Laurence, Ind. Eng. Chem. Fund **7**, 232/239 (1968); Ind. Eng. Chem. Fund **7**, 525/527 (1968).

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Ing. Horst H. Winter  
 Institut f. Kunststofftechnologie der Universität  
 7000 Stuttgart, Böblinger Straße 70